2M

УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, И.А. Новикова
Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Украина

Использование свойств симметрии кривых второго порядка для вывода их канонических уравнений

На основании свойств симметрии кривых второго порядка получены канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы. Предложенный метод позволяет вывести все другие геометрические свойства указанных кривых. С помощью приведенного способа существенно упрощается процедура получения канонических уравнений кривых второго порядка и, кроме того, этот метод имеет ряд преимуществ по сравнению с традиционным способом изложения.

Введение

Выделим три подхода к рассмотрению раздела аналитической геометрии, связанного с кривыми второго порядка. В основе первого из них кривые второго порядка вводятся соответствующими уравнениями, а геометрические свойства кривых выводятся исходя из аналитической формы записи уравнений [1-3].

В другом подходе в качестве определений принимаются геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы. Часто в качестве определений кривых принимаются геометрические свойства фокальных радиусов. Канонические уравнения и другие геометрические свойства кривых выводятся из соответствующих определений [4], [5].

Существует еще один подход, основанный на использовании свойств симметрии кривых второго порядка, который позволяет получить кривые из общего алгебраического уравнения второй степени [6], [7]. Надлежащим выбором декартовой системы координат и определения кривых второго порядка, основанных на свойствах фокальных радиусов и директрис (на различиях значений эксцентриситета), общее уравнение второго порядка приводится к каноническому уравнению соответствующей кривой.

Традиционно раздел аналитической геометрии, связанный с кривыми второго порядка, излагается исходя из определений эллипса, гиперболы и параболы как геометрического места точек, удовлетворяющих определенному геометрическому свойству, характерному рассматриваемой линии. В качестве отправного пункта возьмем алгебраическое уравнение второй степени и используем свойства симметрии фокальных радиусов эллипса и гиперболы.

1. Вывод канонических уравнений кривых второго порядка

Рассмотрим уравнение второй степени общего вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y - a_{33} = 0, \quad (1)$$

где $a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2 \neq 0$, $a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}$ – коэффициенты уравнения, заданные действительные числа. В зависимости от соотношения между коэффициентами уравнение описывает один из трех типов кривых – эллипс, гиперболу и параболу, не считая вы-

рожденные случаи (скажем, когда уравнение (1) распадается на пару параллельных прямых или пару мнимых прямых и т.д.). На внешний вид уравнения (1) влияют не только значения коэффициентов, но и расположение осей декартовых координат. Введем определение эллипса и гиперболы согласно известному геометрическому свойству фокальных радиусов.

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек (г.м.т.) плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная.

Определение. *Гиперболой* называется г.м.т. плоскости, для которых абсолютная разность расстояний до фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная.

Определение гиперболы отличается от определения эллипса тем, что постоянной величиной является не сумма фокальных радиусов, а их абсолютная разность. Поэтому оба определения можно кратко записать

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{2}$$

$$\left| r_1 - r_2 \right| = 2a, \tag{3}$$

где a – произвольная постоянная (множитель 2 выбран из соображения удобства). Тот факт, что для обеих кривых выбрана одна константа $2a$, не отразится на уравнениях кривых, поскольку параметр a имеет различный смысл для обеих кривых.

Замечание 1. Учитывая, что $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, а также, что $\left| r_1 + r_2 \right| = r_1 + r_2$, то определения (2) и (3) можно объединить в одну формулу $\left| r_1 \pm r_2 \right| = 2a$.

Для вывода канонического уравнения эллипса выберем систему координат, как показано на рис. 1, а именно начало системы координат поместим в «центр» кривой, а фокусы – на оси абсцисс симметрично относительно начала координат.

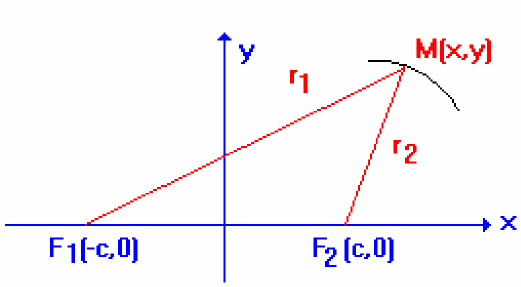


Рисунок 1 – К выводу канонического уравнения эллипса

Как видно из рис. 2, замена координаты y на $-y$ не изменяет суммы $r_1 + r_2$. В свою очередь, это преобразование означает, что уравнение (1) примет вид

$$a_{11}x^2 - 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x - 2a_{23}y - a_{33} = 0, \tag{4}$$

хотя не должно измениться (поскольку равенство $r_1 + r_2 = 2a$ не изменилось). Говорят, что искомое уравнение должно быть инвариантным по отношению к преобразованию координат $y \to -y$. Отсюда следует, что коэффициенты a_{12} и a_{23} равны нулю. Уравнение (1) примет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x - a_{33} = 0. \tag{5}$$

Проделаем аналогичное преобразование по переменной x, заменяя $x \to -x$ (рис. 2). Замечаем, что в равенстве (2) фокальные радиусы r_1 и r_2 поменялись мес-

тами, но сумма $r_1 + r_2$ не изменилась. Это означает, что в уравнении (5) коэффициент a_{13} равен нулю и уравнение примет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = a_{33}. \qquad (6)$$

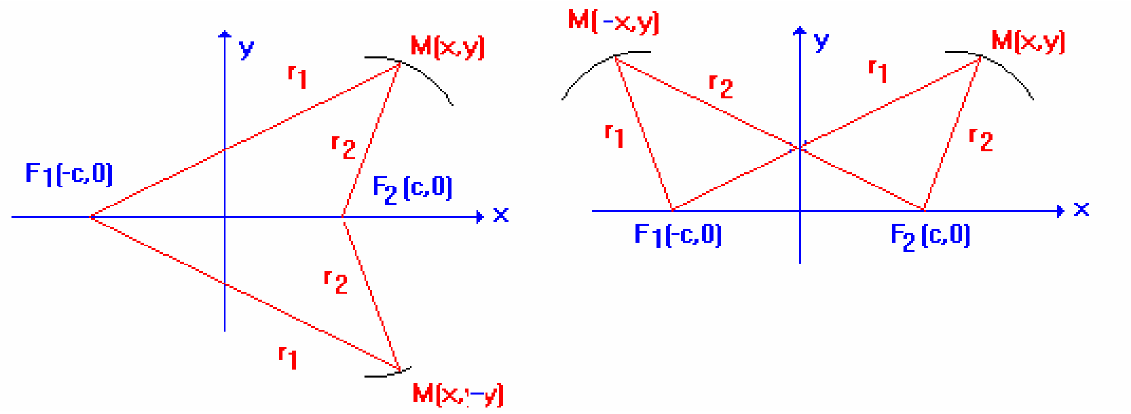


Рисунок 2 – Свойства симметрии суммы $r_1 + r_2$ фокальных радиусов эллипса

Будем считать, что $a_{33} \neq 0$, в противном случае имеем возможности, ни одна из которых не имеет отношения к кривым.

Замечание 2. Если $a_{33} = 0$, то уравнение (6) имеет вид $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0$, откуда следует уравнение точки $(0,0)$ при $a_{11} > 0, a_{22} > 0$; уравнение пары прямых $(\sqrt{a_{11}}x + \sqrt{a_{22}}y)$ $(\sqrt{a_{11}}x - \sqrt{a_{22}}y) = 0$, если a_{11} и a_{22} противоположных знаков и пары мнимых прямых $(\sqrt{a_{11}}x + i\sqrt{a_{22}}y)(\sqrt{a_{11}}x - i\sqrt{a_{22}}y) = 0$, если a_{11} и a_{22} одинаковых знаков.

Разделим уравнение (6) на $a_{33} \neq 0$ и обозначим $\frac{a_{33}}{a_{11}} = \alpha_{11}$, $\frac{a_{33}}{a_{22}} = \alpha_{22}$, получим

$$\frac{x^2}{\alpha_{11}} + \frac{y^2}{a_{22}} = 1. \qquad (7)$$

Обратим внимание на то, что приведенные рассуждения для эллипса остаются справедливыми для гиперболы. Поэтому уравнение (7) описывает как эллипс, так и гиперболу. В зависимости от знаков коэффициентов α_{11} и α_{22} возможны три случая. Для удобства операций со знаками обозначим $\alpha_{11} = a^2$, $\alpha_{22} = b^2$, получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (8)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (9)$$

Как известно, первое из уравнений является каноническим уравнением эллипса, второе и третье – каноническими уравнениями гиперболы и ей сопряженной гиперболы (рис.3).

Замечание 3. Полученные уравнения (8), (9) не могут быть идентифицированы как эллипс и гипербола на данном этапе, поскольку в них не отражена внутренняя структура определений (2), (3), а использованы только свойства симметрии равенств (2), (3).

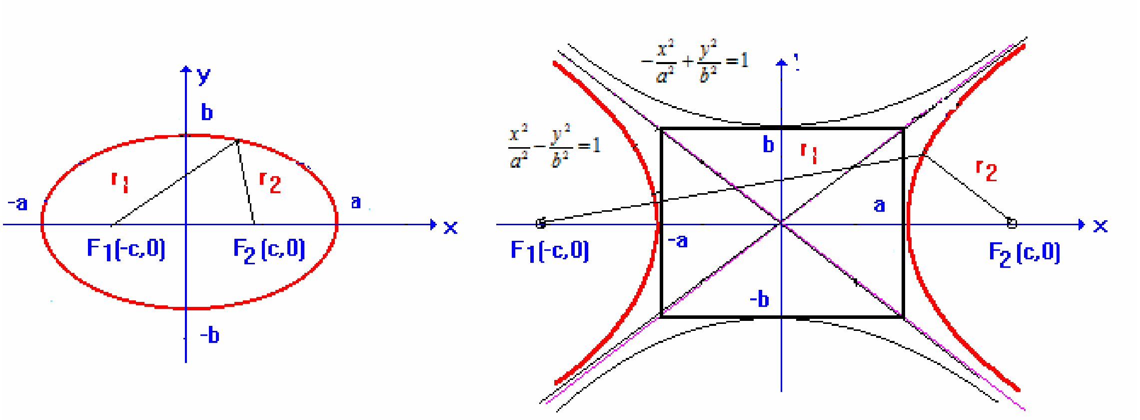


Рисунок 3 – Канонические уравнения эллипса и гиперболы

Обратимся к параболе, которую определим так.

Определение. *Параболой* называется г.м.т. плоскости, для которых расстояние до фокуса F равно расстоянию до некоторой прямой *d*, называемой директрисой.

Для вывода канонического уравнения параболы выберем систему координат, как показано на рис. 4, а именно ось абсцисс перпендикулярна директрисе, а фокус расположен на оси абсцисс, начало системы по середине между директрисой и фокусом.

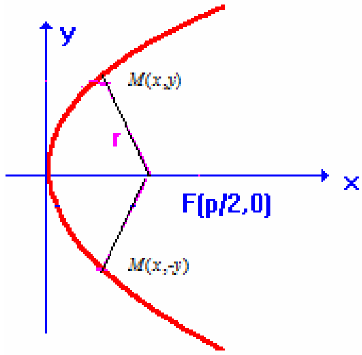


Рисунок 4 – К выводу канонического уравнения параболы

Как видно из рис. 2 и 4, замена координаты y на $-y$ не изменяет фокальный радиус r, сразу получим уравнение (5). Здесь возможны варианты $a_{11} \neq 0$ или $a_{11} = 0$. В первом случае нетрудно выделить полный квадрат по переменной *x*, а это означает, что возникают уже ранее рассмотренные случаи эллипса и гиперболы (уравнения (8), (9) со смещением кривой по оси *x*). Чтобы исключить уже рассмотренные кривые, следует в формуле (5) положить $a_{11} = 0$ (но не $a_{22} = 0$, иначе имеем пару прямых параллельных оси ординат). Итак, имеем уравнение $a_{22}y^2 + 2a_{13}x - a_{33} = 0$, в котором можно положить $a_{33} = 0$, чтобы соответствовать выбору системы координат (рис. 4.) Введя обозначение $p = -\frac{a_{13}}{a_{22}} > 0$, окончательно получим каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px, \qquad (10)$$

где p называется *параметром* параболы.

2. Геометрические свойства кривых второго порядка

Вывод канонических уравнений линий второго порядка (8) – (10) был выполнен только на основании свойств симметрии кривых, более того, в рамках подхода, например, эллипс и гипербола не идентифицированы. Поэтому следует более подробно рассмотреть структуру определений кривых второго порядка, выяснить смысл параметров линий, их соотношения между собой. Другими словами, рассмотреть геометрические свойства кривых второго порядка на основании их определений и их уравнений.

Например, из уравнения (8) следует, что эллипс полностью заключен в прямоугольнике

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1, \frac{y^2}{b^2} \le 1 \to \le 1, -a \le x \le y \le b,$$

где a и b – большая и малая полуоси эллипса.

Связь параметров a, b и c для эллипса получим, направив фокальные радиусы r_1, r_2 в точку $(0;b)$. В этом случае $r_1 = r_2$, а из уравнения (2) следует равенство $r_1(0,b) = r_2(0,b) = a$.

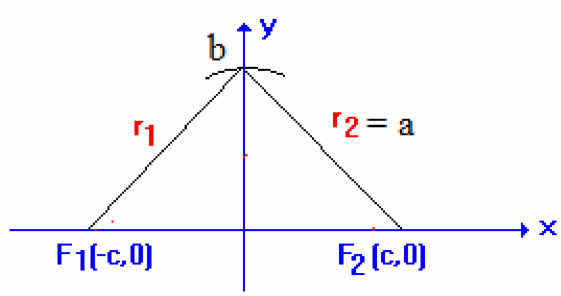


Рисунок 5 – К выводу связи параметров a, b и c эллипса

Как видно из рис. 5,

$$c^2 = a^2 - b^2 > 0. \tag{11}$$

Теперь можно утверждать, что a – большая полуось, а b – малая полуось.

Для гиперболы формальное преобразование эллипса в гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \to \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

приводит к равенству

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{12}$$

В выбранной системе координат фокальные радиусы r_1 и r_2 (рис. 1) имеют вид

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \ r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{13}$$

Запишем определения эллипса $r_1 + r_2 = 2a$ и гиперболы $|r_1 - r_2| = 2a$ в координатах одним уравнением

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a. \tag{14}$$

Подставим в выражение (12) для r_1 уравнение эллипса $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)x^2 + 2xc + c^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 2xc + \frac{c^2}{a^2}x^2} = a + \frac{c}{a}x.$$

Аналогично находим $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x$.

Определим эксцентриситет эллипса, гиперболы равенством $e = \frac{c}{a}$. Тогда выражения для фокальных радиусов эллипса имеют вид

$$\begin{cases} r_1 = a + ex; \\ r_2 = a - ex. \end{cases} \tag{15}$$

Аналогичные равенства имеют место для гиперболы, но следует различать правую ветвь $r_1 > r_2$ и ее левую ветвь $r_2 > r_1$, для которых соответственно

$$\begin{cases} r_1 = a + ex; \\ r_2 = -a + ex. \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 = -a - ex; \\ r_2 = a - ex. \end{cases} \tag{16}$$

Найдем фокальный радиус параболы, выбрав систему координат как показано на рис. 4.

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2} + x. \tag{17}$$

Установим смысл параметра *p*, положив $r\left(\frac{p}{2}\right) = \sqrt{2p\frac{p}{2}} = p \to d = p$ – расстояние от фокуса до директрисы $d = MK$ параболы.

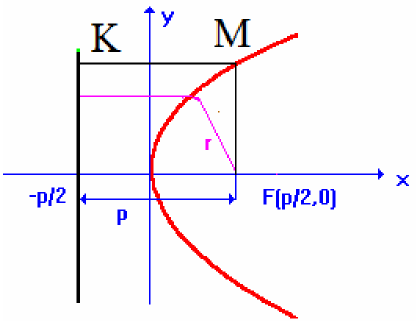


Рисунок 6 – К выяснению геометрического смысла параметра *p* параболы

Найдем эксцентриситеты эллипса и гиперболы, выразив их через параметры a и b

$$e_{элл.} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1;$$
$$e_{гип.} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1. \tag{18}$$

Остается рассмотреть некоторые другие геометрические характеристики кривых второго порядка, в частности, свойства директрис, асимптоты гиперболы. Исследование этих проблем не вызывает особых затруднений.

Заключение

Все типы кривых второго порядка получены из алгебраического уравнения второй степени общего вида. Предложенный вывод канонических уравнений кривых основан на свойствах симметрии суммы и разности фокальных радиусов кривых эллипса, гиперболы и параболы – согласно традиционному определению. Подход позволяет получить уравнения из единых посылок, что повышает ценность результата.

Как промежуточный результат теории следует рассматривать частные случаи уравнения второй степени, что позволяет провести классификацию различных геометрических образов, связанных с общим уравнением. Теория позволяет в полной мере рассмотреть геометрические свойства кривых второго порядка.

Предложенный способ значительно упрощает процедуру получения канонических уравнений кривых и имеет ряд преимуществ в сравнении с традиционным способом изложения. Метод отличается лаконичностью и позволяет получить основные уравнения указанных кривых одновременно, не разделяя рассмотрение отдельных кривых.

Литература

1. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Кадомцев С.Б. – ФМЛ, 2003. – 157 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Ефимов Н.В. – М. : Наука. – 272 с.
3. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П.С. – М. : Наука, 1979. – 512 с.
4. Делоне В.И. Аналитическая геометрия / Делоне В.И., Райков Д.А. – Гостехиздат, 1949. – Т. 1. – 592 с.
5. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – Vol. 1. – 667 p.
6. Улитин Г.М. Геометрический подход к выводу канонических уравнений линий второго порядка / Г.М. Улитин, Л.П. Мироненко // Зб. Науково-методичних робіт. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – Вип. 6. – С. 3-9.
7. Улитин Г.М. Использование свойств симметрии кривых второго порядка для вывода их канонических уравнений. Дидактика математики / Г.М. Улитин, Л.П. Мироненко. – Донецк : ДонНУ, 2009. – С. 32-40.

Міроненко Л.П., Петренко І.В., Новікова І.А.

Використання властивостей симетрії кривих другого порядку для виводу їх канонічних рівнянь
За допомогою симетрії та геометричних властивостей фокальних радіусів ліній другого порядку отримано канонічні рівняння еліпсу, гіперболи, параболи. Запропонований підхід дозволяє вивести всі інші геометричні властивості ліній. Підхід значно спрощує розуміння що до ліній другого порядку і надає теорії загальний характер. Теорія дає можливість розглянути, крім очікуваних канонічних рівнянь ліній, важливі часткові випадки і провести їх класифікацію.

Статья поступила в редакцию 28.12.2009.